Заседание 11 декабря 1951 г.

2. А. М. Молчанов «Критерии дискретности спектра дифференциального уравнения второго порядка».

В сообщении доказывается следующая теорема:

Если в уравнении

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2}+p(x)\,\psi=\lambda\psi \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{1}$$

$p(x)$ ограничена снизу, то для дискретности спектра оператора, определяемого равенством (1), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_a^{a+\delta} p(x)dx \longrightarrow +\infty, \tag{2}$$

когда $a \longrightarrow +\infty$, или $a \longrightarrow -\infty$ при любом постоянном $\delta > 0$.

Доказательство основано на общем критерии дискретности спектра положительно определённого оператора, который состоит в том, что спектр оператора A дискретен тогда и только тогда, когда семейство векторов ψ, удовлетворяющих неравенству

$$(A\,\psi,\,\psi)\leqslant 1,$$

компактно.

Аналогичные теоремы можно доказать для уравнений с частными производными:

Для того чтобы спектр уравнения

$$-\Delta\psi+p\psi=\lambda\psi$$

был дискретен, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{D-F} p\,dv \longrightarrow \infty,$$

когда куб D уходит в бесконечность, сохраняя размер, а замкнутое множество F изменяется как угодно, оставаясь несущественным вырезом куба D.

Под несущественным вырезом куба D понимается расположенное на D замкнутое множество F, ёмкость которого удовлетворяет неравенству

$$C(F)\leqslant \frac{D^{n-2}}{(4n)^{4n}}.$$

Сформулированные теоремы допускают обобщение на уравнения высших порядков.